Tienes 4 horas. Cada problema vale 7 puntos.
Los problemas deben mantenerse confidenciales incluso después del examen hasta el 1 de abril de 2024.

Problema 1. *Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios no constantes con coeficientes enteros positivos. Demuestra que no existen enteros positivos a, b, $c \geq 2$ tales que*

$$^{a}P(x) + {}^{b}Q(x) = {}^{c}R(x)$$

se cumpla para todo $x \in \mathbb{N}$, donde ^{a}t denota la tetration.

Problema 2. *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen*

1. $f(f(x)) - xf(x) + yf(x) = f(f(y)) + xf(y) - yf(y)$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$

Problema 3. *Para cualquier número entero par $k > 2$, llama a un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, k\}$ "bueno" si contiene la mitad de esos números y ninguno de ellos divide a otro. Encuentra el número más pequeño posible que pertenezca a un conjunto bueno, en términos de k.*

Problema 4. *Vanilla y Celestia juegan un juego (¡que acabas de perder!) en un polígono de retícula P. En primer lugar, Vanilla marca una celda C como una mina terrestre, que Celestia conoce, y su tarea es colocar contadores en todas las celdas excepto en C bajo las siguientes reglas:*

- *En el primer turno, puede colocar un contador en cualquier celda.*
- *En cada turno posterior, puede colocar un contador en una celda si y solo si la suma del número de contadores en la misma columna que la celda más el número de contadores en la misma fila es impar.*

Se sabe que existen celdas $C_1, C_2, C_3, \ldots$ en filas y columnas distintas en el polígono, de modo que Celestia puede llenar todas las demás celdas del polígono con contadores si Vanilla elige cualquiera de ellas como mina terrestre. Demuestra que no importa qué celda del polígono Vanilla marque como una mina terrestre, Celestia puede completar su tarea.

Nota: Una celda es un cuadrado delimitado por 4 puntos de retícula adyacentes.

Problema 5. *Dado un triángulo ABC con incentro I, considera S, la intersección de las rectas de Euler de $\triangle ABC$ y $\triangle ABI$. Denota por D la intersección de CI con AB y E como la intersección de AS con la altura C. Demuestra que DE interseca IS en la altura B.*

Nota: La recta de Euler de un triángulo es la línea que pasa por el ortocentro y el baricentro.