Tienes 4 horas. Cada problema vale 7 puntos. Cada pregunta vale 1 punto.
Los problemas deben mantenerse confidenciales incluso después del examen hasta el 1 de abril de 2024.
Todos los resultados deben ser demostrados para obtener los 7 puntos.

Problema 1. *¿Cuáles tableros de $n \times m$ se pueden cubrir con tetrominós en forma de "L" (es decir, piezas en forma de "L" con 4 cuadrados)?*

Problema 2. *Una secuencia de números enteros positivos a_n comienza con $a_1 = a$ y $a_2 = b$ para enteros positivos a y b. Los términos subsiguientes en la secuencia satisfacen las siguientes dos reglas para todos los enteros positivos n:*

$$a_{2n+1} = a_{2n}a_{2n-1}, a_{2n+2} = a_{2n+1} + 4.$$

Exactamente m de los números $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2022}$ son números cuadrados. ¿Cuál es el valor máximo posible de m?

Problema 3. *Sea ABC un triángulo con un ángulo obtuso A e in-centro I. Los círculos ABI y ACI cortan nuevamente a BC en X e Y respectivamente. Las líneas AX y BI se cruzan en P, y las líneas AY y CI se cruzan en Q. Demuestra que $BCQP$ es cíclico.*

Problema 4. *Sean x, y, z números reales positivos. Demuestra que*

$$(xy^2 + yz^2 + zx^2)(x^2y + y^2z + z^2x)(xy + yz + zx)(x + y + z) \geq 1/9(xyz)^3.$$

Pregunta 1. *Encuentra el residuo módulo 11 del número de formas de encender o apagar 10 luces.*

a)1, *b*)3, *c*)5, *d*)7, *e*)9

Pregunta 2. *Encuentra xyz dado que*

$$3^x * 3^y * 3^z = 9$$
$$2^x + 2^y + 2^z = \frac{13}{2}$$
$$x + y = 0$$

$a) - 2$, $b) - 3$, $c) - \frac{1}{2}$, $d) - 4$, $e) - 1$

Pregunta 3. *Iker acaba de sacar su tarjeta de identificación nacional (NID), porque la necesita para viajar a Winchester. Pero David y Alexandro, dos de sus amigos, han decidido robarla. Pero como son un poco torpes, solo han robado 3 dígitos. Ahora, el NID se ve así: $1x94y6z2E$, donde x, y, z son enteros no negativos entre 0 y 9.*

Ahora tienes que ayudar a Iker a encontrarlos. Aquí tienes algunas pistas.

El número $1x94y6z2$ es múltiplo de 12, pero no de 8. z es mayor que y. y es mayor que x. También se sabe que la letra en el NID corresponde al resto de dividir $1x94y6z2$ por 23. Como la letra es E, el residuo es igual a 22. Iker ama el '1', y recuerda que, desafortunadamente, su NID no tiene ningún '1' en sus dígitos. Ayuda a Iker a conocer el valor de $x + y + z$.

a) 23 b) 20 c) 17 d) 26 e) 22

Pregunta 4. *¿Cuántas veces divide 10 a 310!?*

*a)*75, *b)*76, *c)*77, *d)*78, *e)*79

Pregunta 5. *Determina el número de soluciones reales (x, y, z) para el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$x + y + z = 13$$

$$xy + xz + yz = 47.75$$

$$xyz = 35.75$$

*a)*0, *b)*2, *c)*3, *d)*4, *e)*6

Pregunta 6. *Considera un collar con 8 cuentas rojas y 32 cuentas verdes. Diremos que un collar está 'basado' si entre dos cuentas rojas hay al menos dos cuentas verdes. ¿Cuántos collares basados existen?*

*a)*0, *b)*245336, *c)*30667, *d)*10222, *e)*120534

Pregunta 7. *Ana decide jugar con un generador de números aleatorios y genera 4 números aleatorios diferentes del 1 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 de los 4 números que ha generado sumen 15?*

Pregunta 8. *El triángulo ABC con $AB = 14$, $AC = 30$, $BC = 40$ está inscrito en un círculo ω. Las tangentes a ω en B y C se encuentran en un punto T. La tangente a ω en A interseca el bisector perpendicular de AT en el punto P. Calcula el área del triángulo PBC.*

Pregunta 9. *Sea $f(x) = x^2 + 6x + 1$ y R el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tal que $f(x) + f(y) \leq 0$ y $f(x) - f(y) \leq 0$. ¿Cuál es la mejor aproximación del área de R?*

*a)*21, *b)*22, *c)*23, *d)*24, *e)*25.

Pregunta 10. *La cantidad de enteros sin cuadrados en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ está más cerca de:*

*a)*200, *b)*300, *c)*400, *d)*500, *e)*600